

Teil II: Radiologische Diagnostik

9.7 Funktionelle MRT: Fluss, Diffusion, Perfusion, fMRT: Lösungen

Frederik B. Laun und Tristan A. Kuder

Lösung zu 9.27 Fluss:

Der Vektor $\mathbf{k}(t)$ lässt sich bei Kenntnis der Gradientenamplitude $G(t)$ und des gyromagnetischen Verhältnisses γ durch folgende Beziehung berechnen: $\mathbf{k}(t) = \gamma \int_0^t G(t') dt'$.

(a) Es ist $k = |\mathbf{k}|$ für das Gradientenprofil „Phase“ zu berechnen. Für dieses gilt $G(t') = G$ für $0 \leq t' \leq T/\sqrt{2}$ und $G(t') = -G$ für $T/\sqrt{2} < t' \leq T$. Daher berechnet man:

$$\begin{aligned} k &= k(T) = \gamma \int_0^{T/\sqrt{2}} G dt' + \gamma \int_{T/\sqrt{2}}^T (-G) dt' \\ &= \gamma G \left([t']_0^{T/\sqrt{2}} - [t']_{T/\sqrt{2}}^T \right) \\ &= \gamma G \left(\frac{T}{\sqrt{2}} - T + \frac{T}{\sqrt{2}} \right) = \gamma GT(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

(b) Es ist $I_1 = \gamma \int_0^T dt G(t) t$ für das Gradientenprofil „Phase“ zu berechnen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma \int_0^{T/\sqrt{2}} G t' dt' + \gamma \int_{T/\sqrt{2}}^T (-G) t' dt' \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left([t'^2]_0^{T/\sqrt{2}} - [t'^2]_{T/\sqrt{2}}^T \right) \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left(\frac{T^2}{2} - T^2 + \frac{T^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

(c) Es ist $k = |\mathbf{k}|$ für das Gradientenprofil „Schicht“ zu berechnen für $t \geq 0$. Für dieses gilt $G(t') = G$ für $0 \leq t' \leq T/4$ und $G(t') = -G$ für $T/4 \leq t' \leq 3T/4$ und $G(t') = G$ für $3T/4 \leq t' \leq T$. Daher berechnet man:

$$\begin{aligned} k &= k(T) = \gamma \int_0^{T/4} G dt' + \gamma \int_{T/4}^{3T/4} (-G) dt' + \gamma \int_{3T/4}^T G dt' \\ &= \gamma G \left([t']_0^{T/4} - [t']_{T/4}^{3T/4} + [t']_{3T/4}^T \right) \end{aligned}$$



$$= \gamma G \left(\frac{T}{4} - \frac{3T}{4} + \frac{T}{4} + T - \frac{3T}{4} \right) = 0$$

Des Weiteren ist $I_1 = \gamma \int_0^T dt G(t) t$ für das Gradientenprofil „Schicht“ zu berechnen:

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma \int_0^{T/4} G t' dt' + \gamma \int_{T/4}^{3T/4} (-G t') dt' + \gamma \int_{3T/4}^T G t' dt' \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left([t'^2]_0^{T/4} - [t'^2]_{T/4}^{3T/4} + [t'^2]_{3T/4}^T \right) \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left(\frac{T^2}{16} - \frac{9T^2}{16} + \frac{T^2}{16} + T^2 - \frac{9T^2}{16} \right) = 0 \end{aligned}$$

(d) Es ist $k(T)$ für das Gradientenprofil „Auslese“ zu berechnen. Für dieses gilt $G(t') = G$ für $0 \leq t' \leq T/4$ und $G(t') = -G$ für $T/4 \leq t' \leq 3T/4$ und $G(t') = G$ für $3T/4 \leq t' \leq T$. Die Rechnung verläuft identisch wie in (c) und zeigt $k(T) = 0$.

Ebenso lässt sich analog zu (c) $I_1 = \gamma \int_0^T dt G(t) t = 0$ für das Gradientenprofil „Auslese“ zeigen.

(e) Es ist $I_1 = \gamma \int_0^T dt G(t) t$ für das bipolare Gradientenprofil zu berechnen. Für dieses gilt $G(t') = G$ für $0 \leq t' \leq T/2$ und $G(t') = -G$ für $T/2 \leq t' \leq T$. Man findet:

$$\begin{aligned} I_1 &= \gamma \int_0^{T/2} G t' dt' + \gamma \int_{T/2}^T (-G t') dt' \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left([t'^2]_0^{T/2} - [t'^2]_{T/2}^T \right) \\ &= \frac{\gamma G}{2} \left(\frac{T^2}{4} - T^2 + \frac{T^2}{4} \right) = -\gamma G \frac{T^2}{4} \end{aligned}$$



Lösung zu 9.28 Isotrope Diffusion:

(a) Berechnung des mittleren Verschiebungsquadrates. Durch Umstellung von Gleichung 10.7.7 findet man den Ausdruck für das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle(x_2 - x_1)^2\rangle = 2D_0t$ für den Fall freier Diffusion in einer Dimension, d.h. für $d = 1$. Mit den gegebenen Werten $D_0 = 2 \mu\text{m}^2/\text{ms}$ und $t = 100 \text{ ms}$ folgt:

$$\langle(x_2 - x_1)^2\rangle = 2 \cdot 2 \frac{\mu\text{m}^2}{\text{ms}} \cdot 100 \text{ ms} = 400 \mu\text{m}^2.$$

Die zugehörige Längenskala ist $\sqrt{\langle(x_2 - x_1)^2\rangle} = 20 \mu\text{m}$.

Erklärung des Dimensionsfaktors d :

Falls der gleiche Diffusionsprozess entlang einer weiteren Raumrichtung abläuft, z.B. in y -Richtung, so gilt in gleicher Weise $\langle(y_2 - y_1)^2\rangle = 2D_0t$.

Demzufolge gilt für diesen zweidimensionalen Fall:

$$\langle(x_2 - x_1)^2\rangle = \left\langle \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right)^2 \right\rangle = \langle(x_2 - x_1)^2\rangle + \langle(y_2 - y_1)^2\rangle = 2D_0t + 2D_0t = 2dD_0t$$

Somit resultiert der Wert d in Gleichung 10.7.7 aus der Addition der Verschiebungsquadrate für verschiedene Dimensionen.

(b) Berechnung von D_{app} . Gegeben sind b-Wert $b = 1000 \text{ s/mm}^2$ und ein Signalabfall auf 50%.

Man findet: $D_{\text{app}} = \frac{1}{b} \ln(S_0/S_b) = \frac{\ln(1/0.5)}{1000 \text{ s/mm}^2} \approx \frac{0.6931}{1000 \text{ s/mm}^2} \approx 0.69 \mu\text{m}^2/\text{ms}$



Lösung zu 9.29 Diffusionstensor:

(a) MD und FA-Berechnung. Gegeben ist $D_{\parallel} = 2 \mu\text{m}^2/\text{ms}$, $D_{\perp,1} = D_{\perp,2} = 0,5 \mu\text{m}^2$ und zu berechnen sind MD nach Gleichung 10.7.12 und FA nach Gleichung 10.7.13. Man findet:

$$MD = \frac{1}{3}(D_{\perp,1} + D_{\perp,2} + D_{\parallel}) = 1 \mu\text{m}^2/\text{ms}$$

$$\begin{aligned} FA &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(D_{\parallel} - MD)^2 + (D_{\perp,1} - MD)^2 + (D_{\perp,2} - MD)^2}{D_{\parallel}^2 + D_{\perp,1}^2 + D_{\perp,2}^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(1)^2 + (-0.5)^2 + (-0.5)^2}{2^2 + 0,5^2 + 0,5^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1 + 0.25 + 0.25}{4 + 0.25 + 0.25}} \\ &\approx 0.7071 \end{aligned}$$

(b) Wertebereich für die FA.

Minimum der FA, $FA=0$: Die quadratischen Terme in der FA-Gleichung können nicht kleiner als null werden. Der minimale Wert für die FA wird erreicht, wenn der Zähler in der Wurzel gleich seinem minimalen Wert, also gleich null ist, wodurch auch die FA gleich null wird. Dies geschieht, wenn $D_{\parallel} = D_{\perp,1} = D_{\perp,2} = MD$.

Maximum der FA, $FA=1$: Um einen großen FA-Wert zu erreichen, müssen die Quadrate im Zähler möglichst groß werden. Dies wird erreicht, indem z.B. D_{\parallel} sehr groß im Vergleich zu den beiden anderen Werten $D_{\perp,1}$ und $D_{\perp,2}$ wird. Also z.B. $D_{\parallel} = 3\mu\text{m}^2/\text{ms}$ und $D_{\perp,1} = D_{\perp,2} \approx 0 \mu\text{m}^2$. Daraus folgt $MD \approx 1\mu\text{m}^2/\text{ms}$. Und

$$\begin{aligned} FA &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(3 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2}{3^2 + 0^2 + 0^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4 + 1 + 1}{9}} = 1 \end{aligned}$$



Lösung zu 9.30 Perfusion:

Antwort:

Berechnung des RBVs: Vorgegeben ist die Kontrastmittelkonzentration $C(t) = 0,0001 \text{ mol/l} \cdot \exp(-5t/48\text{s})$ und gemäß Gleichung 10.7.17 gilt:

$$RBV = \frac{\int_0^{\infty} dt C(t)}{\int_0^{\infty} dt C_{\text{Arterie}}(t)}$$

Zuerst wird der Zähler berechnet:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt C(t) &= 0,0001 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \cdot \frac{48 \text{ s}}{5} \cdot \left[\exp\left(-\frac{5t}{48 \text{ s}}\right) \right]_0^{\infty} \\ &= 0,0001 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \cdot \frac{48 \text{ s}}{5} \cdot (-1) = 0,00096 \frac{\text{mol s}}{\text{l}} \end{aligned}$$

Nun der Nenner:

$$\int_0^{\infty} dt C_{\text{Arterie}}(t) = \int_0^{1\text{ms}} dt 24 \frac{\text{mol}}{\text{l}} = 24 \frac{\text{mol ms}}{\text{l}}$$

Zusammen:

$$RBV = \frac{0,00096 \frac{\text{mol s}}{\text{l}}}{24 \frac{\text{mol ms}}{\text{l}}} = 0,04 = \frac{4 \text{ ml}}{100 \text{ ml}}$$

Berechnung des RBF: Laut Gleichung 10.7.18 gilt

$$C(t) = RBF \int_0^t dt_1 C_{\text{Arterie}}(t_1) R(t - t_1) = RBF \cdot (C_{\text{Arterie}} * R)(t).$$

Da der Bolus sehr kurz sein soll, kann $C_{\text{Arterie}}(t_1)$ in guter Näherung als Dirac-Delta-Puls aufgefasst werden $C_{\text{Arterie}}(t_1) = \delta(t_1) \cdot 1 \text{ ms} \cdot 24 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$, wodurch sich das Entfaltungsproblem wesentlich vereinfacht:

$$C(t) = RBF \cdot 24 \frac{\text{mol ms}}{\text{l}} \int_0^t dt_1 \delta(t_1) R(t - t_1) = RBF \cdot 24 \frac{\text{mol ms}}{\text{l}} R(t)$$

Da $R(t = 0) = 1$ gilt folgt



$$RBF = \frac{0,0001 \frac{\text{mol}}{\text{l}}}{24 \frac{\text{mol ms}}{\text{l}}} = \frac{1}{240 \text{ s}} = 0.25 \frac{1}{\text{min}} = 25 \frac{\text{ml}}{100 \text{ ml min}}$$

und $R(t) = \exp(-5t/48\text{s})$.

Berechnung der MTT: Mit Gleichung 10.7.19:

$$MTT = \frac{RBV}{RBF} = \frac{\frac{4 \text{ ml}}{100 \text{ ml}}}{25 \frac{\text{ml}}{100 \text{ ml min}}} = 0.16 \text{ min} = 9.6 \text{ s}$$

Lösung zu 9.31 fMRT:

(a) Echozeit.

Für eine Gradientenecho-Sequenz, wie sie bei fMRT-Experimenten eingesetzt wird, ist der Signalabfall

$$S(TE) = S(TE = 0)e^{-TE/T_2^*}$$

in Abhängigkeit von der Echozeit TE hauptsächlich durch die effektive transversale Relaxationszeit T_2^* bestimmt, für welche

$$\frac{1}{T_2^*} = \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_2'}$$

gilt mit der Spin-Spin-Relaxationszeit T_2 und der durch lokale Feldinhomogenitäten bedingten Relaxation mit der Zeitkonstante T_2' . Die bei einem fMRT-Experiment betrachteten Feldinhomogenitäten werden durch lokale Suszeptibilitätsunterschiede bedingt. Daher soll hier davon ausgegangen werden, dass T_2' vollständig durch diese Suszeptibilitätsunterschiede bestimmt ist.

Die Feldinhomogenitäten skalieren linear mit B_0 und somit auch die Änderung der Larmorfrequenz durch dieselben. Wegen der mit B_0 steigenden Rate der Dephasierung gilt

$$\frac{1}{T_2'} \propto B_0.$$

Um denselben suszeptibilitätsbedingten Kontrast bei 7T wie bei 3T zu erhalten, muss also auch die Echozeit mit B_0 skaliert werden, sprich $TE_{7T} = \frac{3}{7} \cdot TE_{3T} = \frac{3}{7} \cdot 40 \text{ ms} \approx 17,14 \text{ ms}$.

(b) SNR-Vergleich.



Es wird davon ausgegangen, dass sich die Gleichgewichtsmagnetisierung M_0 und damit das Grund-SNR, also das SNR bei $TE = 0$, etwa linear mit der Feldstärke erhöht. Es folgt, wobei gemäß der Aufgabenstellung identische T_2 -Zeiten für 3T und 7T angenommen werden:

$$\begin{aligned} \frac{SNR_{7T}}{SNR_{3T}} &= \frac{M_{0;7T}}{M_{0;3T}} \frac{\exp\left(-\frac{TE_{7T}}{T_{2;7T}^*}\right)}{\exp\left(-\frac{TE_{3T}}{T_{2;3T}^*}\right)} \\ &= \frac{7}{3} \cdot \exp\left[-TE_{7T}\left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{2;7T}'}\right) + TE_{3T}\left(\frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_{2;3T}'}\right)\right] \\ &= \frac{7}{3} \cdot \exp\left(-\frac{TE_{7T}}{T_2} + \frac{TE_{3T}}{T_2}\right) \\ &= \frac{7}{3} \cdot \exp\left(-\frac{TE_{7T} - TE_{3T}}{T_2}\right) \approx 2.93 \end{aligned}$$

Hierbei wurde unter Berücksichtigung von (a) $\frac{TE_{3T}}{T_{2;3T}'} = \frac{TE_{7T}}{T_{2;7T}'}$ eingesetzt.

